Aufgabe 4: Anordnungen

Für eine natürliche Zahl n werden alle Möglichkeiten betrachtet, n rote und n schwarze Kugeln in einer Reihe anzuordnen. Zwei Anordnungen werden dabei als gleich angesehen, wenn auf den Plätzen „1“, „2“,… , „$2n$“ jeweils die Farben der Kugeln übereinstimmen.

Man beweise, dass die Anzahl dieser Anordnungen durch $(n+1)$ teilbar ist.

Man zeige zunächst, dass die Aussage für $n = 2$ und $n = 4$ korrekt ist und beweise dann allgemein.

rhein
kreis
neuss

18. Mathematik-Wettbewerb 2021/2022

für die Klassenstufen 11, 12 und 13

Abgabeschluss: Freitag, 01.10.2021

Den Platzierten winken:
Siegerurkunden, Sachpreise,
Vorentscheidung für die Teilnahme an der Landesolympiade Mathematik

Teilnahmebedingungen

Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 11, 12 und 13 an Schulen im Rhein-Kreis Neuss.

- Für jede Aufgabe ist ein gesondertes Blatt zu verwenden.
- Auf jedem Blatt ist der Name deutlich lesbar einzutragen.
- Am linken Blattrand ist ein Rand von 4 cm für Korrekturen freizuhalten.
- Schicke deine Lösungen auch ein, wenn du nicht alle Aufgaben vollständig gelöst hast.
- Jede Einsendung muss mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbstständig gelöst wurden.
- Einer Veröffentlichung des Namens in der Presse wird zugestimmt.

Bei der Bewertung der Lösungen wird darauf geachtet, dass wesentliche Zwischenschritte aufgeführt und begründet werden. Die Angabe eines Zahlenwertes allein genügt nicht als Lösung. Schwer lesbare Arbeiten können von der Bewertung ausgeschlossen werden.

Nach Korrektur und Auswertung werden die erfolgreichen Schülerinnen und Schüler der ersten Runde den Schulen mitgeteilt und zu einer Klausur (Samstag, 13.11.2021) eingeladen, in der dann die Preisträger ermittelt werden.

Die eingereichten Arbeiten gehen in das Eigentum des Wettbewerbs über, die Rückgabe der korrigierten Arbeiten ist ausgeschlossen. Daher empfiehlt es sich, vor Abgabe eine Kopie anzufertigen.

Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
Die Entscheidung über das Abschneiden des Teilnehmers bedarf keiner Begründung gegenüber dem Teilnehmer oder seinen Erziehungsberechtigten. Den Teilnehmern werden die an sie vergebenen Punkte nicht mitgeteilt.

Die Zuschriften (Umschlag DIN A4) können bei der Kreisverwaltung Neuss im Servicecenter des Kreishauses Neuss, Oberstraße 91, abgegeben oder ausreichend frankiert eingesandt werden.

Viel Erfolg!

Abgabe der Lösungen

Bitte füllen Sie den nachstehenden Abschnitt in DRUCKBUCHSTABEN aus und senden diesen mit der Lösung an den Rhein-Kreis Neuss, Amt für Schulen und Kultur, Kennwort "Mathematik-Wettbewerb", Oberstraße 91, 41460 Neuss. Oder Sie geben die Unterlagen einfach im Servicecenter des Kreishauses Neuss, Oberstraße 91, ab.
Abgabeschluss: 01.10.2021

Absender:

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Straße: ______________________ PLZ/Ort: ______________________

E-Mail: ____

Schule: ______________________________________ Klasse: ________

Sofern eine Emailadresse angegeben wird, erfolgen alle weiteren Informationen zum Wettbewerb per E-Mail.

Aufgabe 1: Kerzen

Um 17 Uhr zündet Elise gleichzeitig drei Kerzen an. Sie sind alle drei gleich hoch, aber unterschiedlich dick. Jede Kerze brennt gleichmäßig ab. Um vollständig abzubrennen, braucht die erste Kerze 10 Stunden, die zweite Kerze 8 Stunden und die dritte Kerze 12 Stunden.

Als Elise alle drei Kerzen ausbläst, ist die erste noch genau doppelt so hoch wie die zweite.

- **a)** Man bestimme, zu welcher Uhrzeit Elise die drei Kerzen ausbläst.
- **b)** Man ermittle, wie hoch dann die zweite Kerze im Verhältnis zur dritten ist.

Aufgabe 2: Zahlenrätsel

Die positiven ganzen Zahlen a, b, c und d haben die folgenden vier Eigenschaften:

(1) a und c sind Primzahlen.
(2) c und d unterscheiden sich um genau 1.
(3) a, b, c erfüllen die Gleichung $a \cdot b + 1 = c$.
(4) b, c, d erfüllen die Gleichung $b \cdot d + 1 = b \cdot c + 6$.

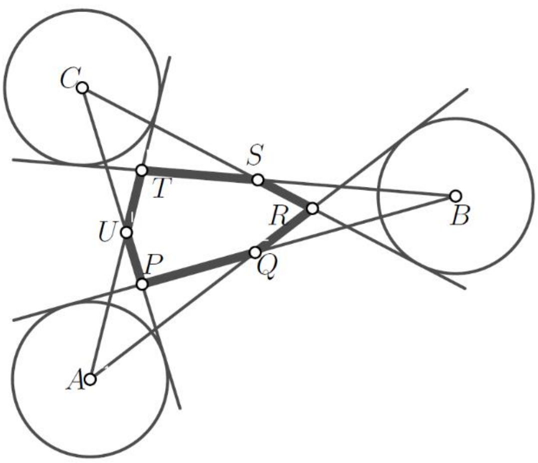
Man berechne die Zahl $(b \cdot d + 1) \cdot 10000 + d \cdot 100 + c$.

Aufgabe 3: Kleinster Umfang

Die Mittelpunkte A, B, C dreier kongruenter Kreise, die keine gemeinsamen Punkte haben, liegen nicht auf derselben Geraden. Von den Punkten A, B, C werden die sechs in Abbildung A 3 gezeigten Tangenten an die Kreise gelegt, die ein konvexes Sechseck einschließen.

Man beweise: Die Summen der Längen von jeweils drei paarweise nicht unmittelbar benachbarten Seiten dieses Sechsecks sind gleich, d. h., es gilt

$$|PQ| + |RS| + |TU| = |QR| + |ST| + |UP| \ .$$



A 3

Hinweis: Man suche nach kongruenten Dreiecken.

Auf der Rückseite geht es weiter.